TP — Polynômes orthogonaux

On se propose d'orthogonaliser des familles de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, puis dans $\mathbb{R}_{10}[x]$. Le procèdé de Schmidt appliquée à une base $(e_1, \ldots, e_n)$ conduit à la famille orthogonalisée $(f_1, \ldots, f_n)$, avec $f_1 = e_1/\|e_1\|$, et pour tout $i > 1$:

$$f_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, \qquad v_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} (e_i, f_k) f_k.$$

Bien entendu, le produit scalaire reste à définir : dans $\mathbb{R}^n$, on dispose d'un produit scalaire naturel (en Maple, c'est la fonction `dotprod`, qui prend en entrée deux vecteurs et retourne un scalaire), mais dans $\mathbb{R}_n[x]$, on dispose d'un nombre de produits scalaires classiques (qui seront définis comme des fonctions de $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$).

1. Orthonormaliser la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la fonction `GramSchmidt`.

2. Ecrire une fonction `orthogonalisation`, prenant en entrée une liste de vecteurs dans un espace V (pas nécessairement $\mathbb{R}^n$) ainsi qu'un produit scalaire (une fonction de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$), et retournant la base orthogonalisée. Vérifier la validité de la procédure avec: `orthogonalisation([v1,v2,v3],dotprod)`.

3. Définir une fonction `scal1` prenant en entrée deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, et retournant $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Vérifier que `scal1(`$x$`,`$x^3$`)` retourne $\frac{2}{5}$ etc.

4. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_{10}[x]$ (c'est-à-dire, $\{1, x, x^2, \ldots, x^{10}\}$) pour ce produit scalaire (produire la liste explicite $\{f_1, \ldots, f_{11}\}$). Vérifier que les polynômes obtenus sont proportionnels aux polynômes de Legendre (voir le package `orthopoly`).

5. Tracer les graphes de la fonction $g(x) = \cos x$ et de la somme partielle

$$g_{11}(x) = \sum_{k=1}^{11} \big(g(x), f_k(x)\big) f_k(x)$$

   avec $\{f_k\}$ obtenus dans Q4. Commentaire?

6. Même chose avec les polynômes d'Hermite et Laguerre, respectivement associés aux produits scalaires

$$(P, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} P(t)Q(t)dt,$$
$$(P, Q) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} P(t)Q(t)dt.$$

7. Considérons les polynômes d'Hermite $\{H_n(x)\}$ (standartisation: $H_n(x) = 2^n x^n + \text{poly}_{n-1}(x)$).

- Montrer que

$$g_N(x) \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{(H_n, g)}{(H_n, H_n)} H_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathcal{H}_N(x,y) g(y)\, dy,$$

  avec

$$\mathcal{H}_N(x,y) = \frac{1}{2(H_N, H_N)} \cdot \frac{H_{N+1}(x)H_N(y) - H_N(x)H_{N+1}(y)}{x-y}. \tag{1}$$

- A l'aide de Maple, calculer explicitement $\mathcal{H}_5(x,y)$ et tracer sur le même graphe les fonctions $g(x) = \cos x$ et $g_5(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathcal{H}_5(x,y) g(y)\, dy$.

- Montrer (+ **2 points à la note finale**) que

$$(H_n, H_n) = n!\, 2^n \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

- En utilisant (2) dans (1), tracer le graphe de la fonction

$$f_N(x,y) = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \mathcal{H}_N\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2N}}, \frac{\pi y}{\sqrt{2N}}\right)$$

  pour $x \in [-3,3]$, $y \in [-3,3]$ et $N = 10, 100, 1000$. Quelles hypothèses concernant la fonction $f(x,y) = \lim_{N\to\infty} f_N(x,y)$ s'ensuivent?

- Montrer (+ **3 points à la note finale**) que

$$f(x,y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}.$$